Matemáticas Discretas
TC1003

Teoría de Conjuntos: Propiedades de las Operaciones

Departamento de Matemáticas / Centro de Sistema Inteligentes

ITESM

Sean X y Y conjuntos dados. Para probar que

$$X \subseteq Y$$

recordemos que $X \subseteq Y \equiv \forall x, x \in X \rightarrow x \in Y$. Una estrategia sería:

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

El Argumento del Elemento

Sean X y Y conjuntos dados. Para probar que

$$X \subseteq Y$$

recordemos que $X \subseteq Y \equiv \forall x, x \in X \rightarrow x \in Y$. Una estrategia sería:

- Para manejar el para todo se usa el método de generalización: suponga un elemento arbitrario x,
- para probar que muestre que $x \in X \rightarrow x \in Y$ seguiremos la estrategía del método de prueba directo:
  - supondremos que $x \in X$ para x arbitrario,
  - mostraremos que $x \in Y$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Pruebe que $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Demostración

Sea z un **elemento cualquiera** de $\mathbf{Z}$. Así

$$z = \frac{z}{1}$$

Por lo tanto, z puede ser visto como la división entre dos enteros (el mismo z y el 1). Por tanto, z es un racional. Por tanto z está en $\mathbf{Q}$. Por el argumento del elemento arbitrario $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Versiones Operativas de las Operaciones

Sean X y Y subconjuntos de un conjunto universal $\mathscr{U}$, y suponga que x y y con dos elementos de $\mathscr{U}$:

- $x \in X \cup Y \equiv (x \in X) \vee (x \in Y)$
- $x \in X \cap Y \equiv (x \in X) \wedge (x \in Y)$
- $x \in X - Y \equiv (x \in X) \wedge (x \notin Y)$
- $x \in X^c \equiv x \notin X$
- $(x, y) \in X \times Y \equiv (x \in X) \wedge (y \in Y)$
- $x \in \mathscr{P}(X) \equiv x \subseteq X$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Indique en orden los conjuntos que completan las afirmaciones:

- Decir que un elemento x pertenece a $B \cap (A \cup C)$ significa que x pertenece a B y que x pertenece a **(a)**.
- Decir que un elemento x pertence a $(B - C) \cup A$ significa que x pertenece a A o que x pertenece a **(b)**.
- Decir que un elemento x pertenece a $C - (B \cup A)$ significa que x pertenece a **(c)** pero que x no pertenece a **(d)**.

Dentro de la opciones:

1. $C - B$
2. $B - C$
3. $A \cup C$
4. $B \cup A$
5. C
6. $C - A$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Prueba de Igualdad entre Conjuntos

Sean X y Y conjuntos dados. Para probar que $X = Y$:

- pruebe que $X \subseteq Y$,
- pruebe que $Y \subseteq X$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes Conmutativas

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes Asociativas

Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento
Base
Ley Diferencia

Leyes Distributivas

Sean A, B y C conjuntos cualquiera, entonces:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes de Identidad

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \mathscr{U} = A$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes de Complemento (Negación)

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

- $A \cup A^c = \mathscr{U}$
- $A \cap A^c = \emptyset$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes de Idempotencia

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes de Dominación

Sean A un conjunto cualquiera, entonces:

- $A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Leyes de De Morgan

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento
Base
Ley Diferencia

Leyes de Absorción

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento
Base
Ley Diferencia

Complemento Base

- $\mathscr{U}^c = \emptyset$
- $\emptyset^c = \mathscr{U}$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ley de Diferencia

Sean A y B dos conjuntos cualquiera, entonces:

- $(A - B) = A \cap B^c$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Indique en orden la opción que contiene la ley cuyo uso se lleva a cabo en:

a) $(((D - E)^c)^c)^c = (D - E)^c$:Doble Complemento

b) $(B \cap C) \cap (B \cap C)^c = \emptyset$:Ley Complemento

c) $E^c \cap (D \cap B) = (E^c \cap D) \cap B$:Asociativa

d) $E^c \cup E^c = E^c$:Idempotencia

e) $B \cap (B \cup (C \cup D)) = B$:Absorción

dentro de la lista:

1. Ley de Complemento
2. Ley de Idempotencia
3. Ley Asociativa
4. Ley del Doble Complemento
5. Propiedad Distributiva
6. Ley de Absorción

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Indique en orden las leyes que justifican los pasos indicados.

$$
\begin{aligned}
A - (A \cap E) &= A \cap (A \cap E)^c && \text{por Ley de Diferencia} \\
&= A \cap (A^c \cup E^c) && \text{por De Morgan} \\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap E^c) && \text{por Ley Distributiva} \\
&= \emptyset \cup (A \cap E^c) && \text{por Ley de Complemento} \\
&= (A \cap E^c) \cup \emptyset && \text{por Ley Conmutativa} \\
&= A \cap E^c && \text{por Ley de Identidad} \\
&= A - E && \text{por Ley de Diferencia}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Indique en orden las leyes que justifican los pasos indicados.

$$\begin{aligned}(D \cap A^c) \cup (D \cap A) &= D \cap (A^c \cup A) && \text{por } \underline{\text{Ley Distributiva}} \\ &= D \cap (A \cup A^c) && \text{por } \underline{\text{Ley Conmutativa}} \\ &= D \cap \mathscr{U} && \text{por } \underline{\text{Ley de Complemento}} \\ &= D && \text{por } \underline{\text{Ley de Identidad}}\end{aligned}$$

Ejemplo

Indique en orden las leyes que justifican los pasos indicados.

$$
\begin{aligned}
(C \cup B^c)^c \cup (C^c \cap B^c) &= (C^c \cap (B^c)^c) \cup (C^c \cap B^c) && \text{por \_\_} \\
&= (C^c \cap B) \cup (C^c \cap B^c) && \text{por \_\_} \\
&= C^c \cap (B \cup B^c) && \text{por \_\_} \\
&= C^c \cap \mathscr{U} && \text{por \_\_} \\
&= C^c && \text{por \_\_}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Indique en orden la simplificación de cada conjunto:

a) $B \cup \emptyset$

b) $B \cup B$

c) $B - \emptyset$

d) $B \cap B^c$

e) $B \cup B^c$

dentro de la lista:

1. B
2. $\mathscr{U}$
3. $\emptyset$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Indique cuáles opciones contiene expresión que se simplifica a E:

1. $(E \cap C^c) \cap (E^c \cap C^c)$
2. $(D^c \cap E) \cup E$
3. $(E^c \cap D)^c \cup (E^c \cap D^c) \cup (E \cap D)$
4. $(E \cap ((E^c \cup D)^c)) \cup (E \cap D)$
5. $E \cap (D^c \cup C \cup E)$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Teorema

Para cualquier conjuntos E y D se cumple: Si $E \subseteq D$ entonces $E \cup D \subseteq D$.

Demostración

Sean E y D cualquier conjuntos. Según _____, lo que se debe demostrar es que todo elemento x de _____ es también elemento de _____. Sea x un elemento cualquiera de $E \cup D$. Existen sólo dos casos para x:

i) $x \in E$

ii) $x \in D$

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Para el primer caso, debido a que _____ si $x \in E$ entonces $x \in D$. Para el segundo caso, como $x \in D$ nuevamente $x \in D$. Por consiguiente, en cualquier caso cualquiera que sea x, si _____ entonces $x \in D$. Por tanto,ambos conjuntos son iguales. **cqd**

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Teorema

Para cualquier conjuntos B, C y A se cumple:

$B \cap (C \cap A) = (B \cap C) \cap A$

Demostración

Sean B, C y A cualquier conjuntos. Según _____, lo que se debe demostrar es que:

i) $B \cap (C \cap A) \subseteq (B \cap C) \cap A$

ii) _____

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Para el primer caso, si x es cualquier elemento de $B \cap (C \cap A)$ entonces $x \in B$ y _____. Por la Ley distributiva en Lógica x cumple $x \in B \cap C$ y $x \in A$, y por consiguiente _____. Con esto se prueba que $B \cap (C \cap A) \subseteq (B \cap C) \cap A$.
Para el segundo caso, si x es cualquier elemento de _____ entonces $x \in B \cap C$ y _____ . Por la propiedad asociativa de la lógica x cumple $x \in B$ y $x \in A \cap C$, y por consiguiente _____. Con esto se prueba que $(B \cap C) \cap A \subseteq B \cap (C \cap A)$. La prueba de las contenciones mutuas prueba que ambos conjuntos son iguales. **cqd**

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A y B conjuntos cualquiera.

Si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A y B conjuntos cualquiera.

Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B^c = \emptyset$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento
Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A y B conjuntos cualquiera.

Si $A \subseteq B^c$, entonces $A \cap B = \emptyset$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos cualquiera.
Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos cualquiera.

Si $A \subseteq B$ y $B \cap C = \emptyset$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos cualquiera.
Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos cualquiera.

Si $B \subseteq C$ y $A \cap C = \emptyset$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia

Ejemplo

Sean A, B y C conjuntos cualquiera.

Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq B \cap C$.

Argumento del Elemento
Ejemplo 1
Operativa
Prueba de igualdad
Conmutatividad
Asociatividad
Distributividad
Leyes Identidad
Leyes Complemento
Leyes Idempotencia
Leyes Dominación
De Morgan
Absorción
Complemento Base
Ley Diferencia